Université Louis Pasteur
Licence Mathématiques-Economie
Année universitaire 2007-2008
Enseignante : Isabelle MARET
Durée : 2h
Documents autorisés : Néant
Calculatrices non autorisées
Session de janvier 2008

Correction de l'examen de Micro-économie Approfondie:

Introduction à la Théorie des Jeux et Applications à l'Organisation Industrielle

---

Exercice 1 :

1. **(7 points)** Pour un niveau donné q_0 de la production initiale de la firme installée, déterminons l'équilibre de Cournot-Nash du jeu de seconde période.

Déterminons les fonctions de réaction des deux joueurs.

Face à la stratégie q_2 de sa concurrente, l'entreprise 1 résout le problème suivant

$$\max_{0 \leq q_1} (1 - q_1 - q_2 - c) q_1$$

Ce problème d'optimisation sous contrainte d'inégalité se résout à l'aide de la méthode de Kuhn-Tucker.

Le lagrangien de ce problème de décision s'écrit :

$$L(q_1, \mu_1, \mu_2) = (1 - (q_1 + q_2) - c) q_1 + \mu q_1,$$

où μ est le paramètre de Kuhn-Tucker associé à la contrainte de positivité.

La méthode de Kuhn-Tucker établit que pour toute solution q_1^* il existe un paramètres $\mu^* \geq 0$ tel que les conditions d'optimisation de premier ordre suivantes soient remplies :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1}(q_1^*, \mu^*) = 1 - 2q_1^* - q_2 - c = -\mu^* \\ \mu^* q_1^* = 0 \end{cases}$$

Pour une solution telle que $q_1^* = 0$, on aura donc nécessairement

$$1 - q_2 - c = -\mu^* \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \pi_1}{q_1}(0, q_2^*) \leq 0.$$

Ceci signifie que si l'entreprise 1 ne produit c'est que le profit marginal d'un accroissement de sa production est nul (lorsque qu'elle ne produit pas). Ce cas de figure se présente lorsque $q_2 \geq 1-c$.

Pour une solution telle que $0 < q_1^*$, on aura donc nécessairement

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu^* = 0 \\ 1 - 2q_1^* - q_2 - c = 0 \end{array} \right. .$$

D'où

$$q_1^* = \frac{1-c-q_2}{2}.$$

Or, la fonction objectif est concave par rapport à la variable de décision et les fonctions qui définissent les contraintes sont convexes en q_1, par conséquent, les conditions nécessaires d'optimisation de premier ordre de Kuhn-Tucker sont suffisantes pour caractériser une solution.

Nous pouvons en déduire que la fonction de meilleure réponse de l'entreprise 1 s'écrit

$$R_1\left(q_2\right) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } q_2 \geq 1-c \\ \frac{1-c-q_2}{2} \text{ si } q_2 \leq 1-c. \ (1) \end{array} \right.$$

En suivant un raisonnement analogue, on démontre que la fonction de meilleure réponse de l'entreprise 1 s'écrit

$$R_2\left(q_1\right) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } q_1 \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}q_1 \text{ si } q_1 \leq \frac{1}{2} \quad (2) \end{array} \right. .$$

L'équilibre de Cournot-Nash est alors défini par

$$\left\{ \begin{array}{c} q_1^* = R_1\left(q_2^*\right) \\ q_2^* = R_2\left(q_1^*\right) \end{array} \right. .$$

Remarquons que par hypothèse

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &< 1-c \Leftrightarrow c < \frac{3}{4} \text{ car } c = \frac{1}{2} - 3q_0 \leq \frac{1}{2} \\ \text{et } \frac{1-c}{2} &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les courbes de réaction des deux firmes se coupent nécessairement en un point du plan (q_1, q_2) sur les portions (1) et (2) des courbes.

L'équilibre de Cournot-Nash (q_1^*, q_2^*) est solution du système d'équations

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} q_1^* = \frac{1-c-q_2^*}{2} \\ q_2^* = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} q_1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} 2q_1^* + q_2^* - (1-c) = 0 \\ \frac{1}{2} q_1^* + q_2^* - \frac{1}{4} = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} q_1^* = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} c \\ q_2^* = \frac{c}{3} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

2. **(6 points)** Déterminons le(s) EPSJ de ce jeu séquentiel.

Pour cela nous appliquons le principe de rétroduction.

Il s'agit tout d'abord, pour un niveau donné de l'investissement de première période, de déterminer (cf question 1) l'équilibre de Cournot-Nash du sous-jeu de la concurrence en quantités de seconde période.

Puis de déterminer l'équilibre de Nash du jeu réduit de première période où les quantités produites par les deux firmes ont été remplacées par leur expression à l'équilibre de Nash du sous-jeu de seconde période.

Il nous reste à déterminer la stratégie optimale de la firme installée en première période.

Déterminons le profit des deux firmes compte tenu de l'équilibre de Cournot-Nash du sous-jeu de la concurrence en quantités de seconde période.

$$\left\{ \begin{array}{c} \Pi_1 \left(q_1^* \left(q_0 \right), q_2^* \left(q_0 \right) \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} c \left(q_0 \right) \right)^2 - \frac{1}{2} q_0 = \widetilde{\Pi_1} \left(q_0 \right) \\ \Pi_2 \left(q_1^* \left(q_0 \right), q_2^* \left(q_0 \right) \right) = \frac{c(q_0)^2}{9} = \widetilde{\Pi_2} \left(q_0 \right) \end{array} \right. .$$

Si l'objectif de la firme installée en première période est d'évincer sa concurrente du marché, elle choisit q_0 de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{c \left(q_0 \right)^2}{9} = \widetilde{\Pi_2} \left(q_0 \right) & \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2} - 3q_0 \right)^2}{9} & \leq 0. \end{aligned}$$

Or, cette inégalité est satisfaite pour $q_0 = \frac{1}{6}$ et $q_0 \in \left[0, \frac{1}{6}\right]$, la firme installée peut donc interdire l'entrée à sa concurrente en choisissant $q_0^* = \frac{1}{6}$.

Vérifions que la firme installée a intérêt à faire ce choix et à ne pas s'accomoder de l'entrée de sa concurrente. Si la firme installée s'accomode de sa concurrente, son problème de décision de première période est de choisir la quantité $q_0^* \geq 0$

de sorte à maximiser son propre profit qui s'écrit

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Pi_1}(q_0) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}c(q_0)\right)^2-\frac{1}{2}q_0 \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-3q_0\right)\right)^2-\frac{1}{2}q_0 \\
&= \left[\left(2q_0+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{2}q_0\right]
\end{aligned}$$

Calculons la dérivée première de cette fonction

$$\frac{d\widetilde{\Pi_1}}{dq_0}(q_0)=8q_0+\frac{1}{6}$$

Cette fonction est strictement croissante en q_0 sur $\left[0,\frac{1}{6}\right]$. L'entreprise installée choisira donc une quantité q_0 maximale soit $q_0^*=\frac{1}{6}$ de sorte à évincer son concurrent potentiel du marché.

En conclusion l'équilibre parfait en sous-jeux est

$$\left(\left(q_0^*,q_1^*\right),q_2^*\right)=\left(\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right),0\right).$$

3. **(3 points)** La firme installée adopte donc en première période une stratégie d'investissement de type "top dog". En effet, nous avons vu qu'elle choisit une niveau d'investissement $q_0^*>0$. Or, cet investissement la rend agressive, car

$$\begin{aligned}
\frac{d\Pi_2}{dq_0} &= \frac{2}{9}c'(q_0)\,c(q_0) \\
&= -\frac{2}{9}\times\frac{2}{(2+2q_0)^3}<0.
\end{aligned}$$

Ceci est en accord avec l'analyse faite en cours. En effet, nous remarquons également que les stratégies de seconde période sont substituables car $\frac{dR_1}{dq_2}(q_2)\leq 0$ et $\frac{dR_2}{dq_1}(q_1)\leq 0$. Or, nous avons vu en cours que le signe de l'effet stratégique induit par un accroissement de l'investissement de première période à savoir $\frac{d\pi_1}{dq_2}\times\frac{dq_2^*}{dq_0}$ est tel que

$$sgn\left(\frac{d\pi_1}{dq_2}\times\frac{dq_2^*}{dq_0}\right)=sgn\left(\frac{d\pi_2}{dq_0}\right)sgn\left(R_2'\right)$$

Par conséquent, on est dans un cas de figure où cet effet stratégique est positif. Plus précisément, la firme installée a intérêt à surinvestir et cet investissement la fait paraître agressive. Cette surpoduction de première période lui permet de bien maîtriser sa technologie de production de sorte à réduire significativement ses coûts de production. Ceci lui permet d'évincer sa concurrente du marché.

Exercice 2 : (4 points)
Considérons la stratégie suivante d'Averell:

- jouer N à la date 0,

- jouer N à la date t tant que Joe joue N à la date $t-1$ et

- si jamais Joe joue D à la date $t-1$, jouer D de la date t jusqu'à la fin du jeu.

Face à cette stratégie d'Averell, il est facile de déterminer la stratégie optimale de Joe. S'il joue tout le temps N, il va obtenir un flux continu de gains égaux à 3 jusqu'à la fin des temps. La valeur actualisée de ce flux est

$$\sum_{t=0}^{+\infty} 3\delta^t = \frac{3}{(1-\delta)}.$$

S'il dévie à la date T an choisissant D de cette date jusqu'à la fin des temps, alors il va obtenir 4 à la date T mais 0 de la date $T+1$ jusqu'à la fin des temps. La stratégie coopérative reste préférable si

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{T-1} 3\delta^t + \sum_{t=T}^{+\infty} 3\delta^t &\geq \sum_{t=0}^{T-1} 3\delta^t + 4\delta^T \\
\Longleftrightarrow \sum_{t=T}^{+\infty} 3\delta^t &\geq 4\delta^T \\
\Leftrightarrow \sum_{t=T}^{+\infty} 3\delta^T\delta^{t-T} &\geq 4\delta^T \\
\Leftrightarrow \sum_{t=0}^{+\infty} 3\delta^t &\geq 4 \\
\Leftrightarrow \frac{3}{1-\delta} &\geq 4 \\
\Leftrightarrow \delta &\geq \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la stratégie d'Averell annoncée initialement et sa symétrique pour Joe forment un équilibre de Nash de ce jeu répété à l'infini.